Вариант E (Условия задач и их решения)

Приведите пример задачи минимизации вида

$$J(u) \to \inf, \quad u \in U = \{u \in U_0 = R^1 \mid g(u) \leqslant 0\}, \tag{1}$$

по отношению к которой двойственной является следующая задача максимизации:

$$\psi(\lambda) \to \sup, \quad \lambda \geqslant 0, \tag{2}$$

где

$$\psi(\lambda) = \begin{cases} -\lambda + 2 - \frac{1}{4\lambda} & \text{при} \quad \lambda > 0, \\ -\infty & \text{при} \quad \lambda \leqslant 0. \end{cases} \tag{3}$$

Предъявите конкретные аналитические зависимости функций $J(u)$ и $g(u)$ от переменной u и приведите соответствующее обоснование.

Ответ: $J(u) = 2 - u,\; g(u) = u^2 - 1$. Другой возможный вариант см. в (10)).

Решение. Попробуем восстановить (угадать) возможный облик исходной задачи (1), исходя из того, что, с одной стороны,

$$\psi(\lambda) = J\big(u(\lambda)\big) + \lambda\, g\big(u(\lambda)\big), \qquad u(\lambda) = \arg\min_{u \in R^1} \big(J(u) + \lambda g(u)\big), \tag{4}$$

а, с другой стороны, выражение (3) для $\psi(\lambda)$ можно записать в форме, подобной (4):

$$\psi(\lambda) = 2 - \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{4\lambda} - \lambda = 2 - \frac{1}{2\lambda} + \lambda\left(\frac{1}{4\lambda^2} - 1\right). \tag{5}$$

При сопоставлении (4) с (5) возникает гипотеза о том, что подходящей может быть такая комбинация:

$$u(\lambda) = \frac{1}{2\lambda}, \quad J(u) = 2 - u, \quad g(u) = u^2 - 1. \tag{6}$$

Проверим, насколько она верна, построив задачу, двойственную к задаче (1) с данными (6). Находим сопряжённую функцию:

$$p(\lambda) = \inf_{u \in R^1} \Big(2 - u + \lambda\,(u^2 - 1)\Big) = \begin{cases} -\lambda + 2 - \frac{1}{4\lambda} & \text{при} \quad \lambda > 0, \\ -\infty & \text{при} \quad \lambda \leqslant 0, \end{cases}$$

и видим, что она совпадает с $\psi(\lambda)$, так что найденная линейно-квадратичная пара $J(u),\; g(u)$ из (6) действительно является подходящей.

Заметим. что искомые данные задачи (1) *определяются неоднозначно* и другую комбинацию $J(u)$, $g(u)$ можно можно найти, построив двойственную задачу по отношению к (2), (3). Для реализации этого плана перепишем задачу (1) в форме задачи минимизации:

$$I(x) = -\psi(x) \to \inf, \quad -x \leqslant 0, \tag{7}$$

и найдём сопряжённую функцию

$$p(\mu) = \inf_{x \in R^1} \big(-\psi(x) + \mu(-x) \big) \overset{(3)}{=} \inf_{x > 0} \big(-\psi(x) + \mu(-x) \big), \quad \mu \in R^1, \tag{8}$$

котороую следует максимизировать при условии, которое соответствует имеющемуся в (7) ограничению-неравенству:

$$\mu \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad q(\mu) = -\mu \leqslant 0. \tag{9}$$

Учитывая конструкцию (2) функции $\psi(\lambda)$, получаем

$$p(\mu) = -\infty \quad \text{при} \quad \mu > 1; \quad p(\mu) = \sqrt{1 - \mu} - 2 \quad \text{при} \quad \mu \leqslant 1.$$

Если придать полученной задаче форму задачи минимизации, то получим задачу вида (1), в которой $J(u) = -p(u)$ и $g(u) = q(u) = -u$:

$$J(u) = \left\{ \begin{array}{cc} 2 - \sqrt{1 - u} & \text{при} \;\; u \leqslant 1, \\ +\infty & \text{при} \;\; u > 1 \end{array} \right\} \to \inf, \quad g(u) = -u \leqslant 0. \tag{10}$$

Нетрудно проверить, что двойственная задача по отношению к (10) также совпадает с (2), (3).